Sia $\beta : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ bilineare e simmetrica (prod. scalare) e non degenere $\mathrm{Rad}(\beta) = \{0\}$

ALLORA $\forall X \subseteq V_n(\mathbb{K})$:

$$\dim \mathcal{L}(X) + \dim X^{\perp} = n$$

Sia B una base di $\mathcal{L}(X) \Rightarrow B^{\perp} = X^{\perp}$

$$B = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_t)$$

$$\varphi_B : \begin{cases} V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^t \\ \bar{y} \to (\beta(\bar{y}, \bar{x}_1) \dots \beta(\bar{y}, \bar{x}_t)). \end{cases}$$

$\dim \mathrm{Dom}(\varphi_B) = n$

$\ker(\varphi_B) = X^{\perp} = B^{\perp}$

$\dim \mathrm{Im}(\varphi_B) = t$

φ_B è suriettiva.

Supponiamo φ_B NON SURIETTIVA

$\Rightarrow \exists\, W \subseteq \mathbb{K}^n$: $\mathrm{Im}(\varphi_B) \subseteq W$ e $W \neq \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ Esiste una equazione

$$\delta_1 x_1 + \dots + \delta_t x_t = 0 \qquad (\delta_1 \dots \delta_t) \neq \underline{0}$$

soddisfatta da tutti i vettori di W

$$\Rightarrow \quad \delta_1 B(\bar{y}, \bar{x}_1) + \dots + \delta_t B(\bar{y}, \bar{x}_t) = 0 \quad \forall \bar{y} \in V_n(\mathbb{K})$$

$$\Rightarrow \quad B(\bar{y}, \delta_1 \bar{x}_1 + \dots + \delta_t \bar{x}_t) = 0 \quad \forall y \in V_n(\mathbb{K})$$

$$\Rightarrow \delta_1 \bar{x}_1 + \dots + \delta_t \bar{x}_t \in \mathrm{Rad}(B) = \{\underline{0}\}.$$

MA $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_t)$ Base $\Rightarrow$ φ_B è suriettiva

□

Def: Siano $\bar{u}, \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$; $\beta(\bar{u},\bar{u}) \neq 0 \Rightarrow$

è sempre possibile scrivere

$$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$$

ove $\bar{v}_{\parallel} = a\bar{u}$ e $\bar{v}_{\perp} \perp \bar{u}$.



$\bar{v}_{\parallel}$ è detto proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su $\bar{u}$

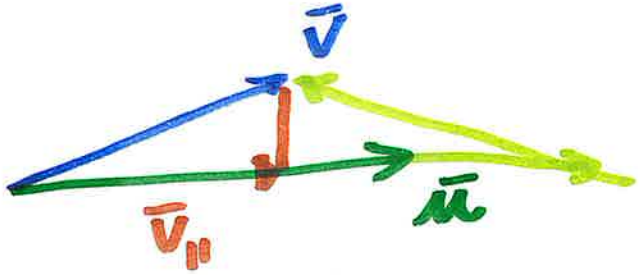
$$\bar{v}_{\parallel} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\,\bar{u} \qquad \bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel}$$

$\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{v}$ su $\bar{u}$.

Se siamo in uno sp. vettoriale reale ed Euclideo (prod. scal definito positivo)

$\bar{v}_{\parallel}$ è il vettore proporzionale ad $\bar{u}$ tale che la norma di $\bar{v} - \bar{v}_{\parallel}$ sia minima.

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{argmin} \| \bar{v} - \alpha \bar{u} \|_2 \\ \bar{v}_{\parallel} = \alpha \bar{u} \end{cases} \qquad \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}$$



$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}_{\parallel}$$

$$= \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$$

$$\vec{u}_{\perp} + \vec{u}_{\parallel} = \vec{v}$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{v} - \vec{u}_{\parallel}$$

$$= \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$$

$$= \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}_{\perp}\|^2$$

$$= (\vec{u}_{\perp}-\vec{u}_{\parallel})\cdot(\vec{u}_{\perp}-\vec{u}_{\parallel})$$

$$= \|\vec{u}_{\perp}-\vec{u}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{u}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{u}_{\perp}\|^2 - 2(\vec{u}_{\perp}\cdot\vec{u}_{\parallel})$$

$$= \|\vec{u}_{\perp}-\vec{u}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{u}_{\parallel}\|^2$$

$$= \|\vec{u}_{\perp}-\vec{u}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{u}_{\parallel}\|^2$$

OSS: Sia β un prod. scalare su $V_n(\mathbb{K})$ e sia B la sua matrice rappresentativa rispetto una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.

$\Rightarrow$ Se $\bar{x} = \sum x_i \bar{e}_i$ $\quad \bar{y} = \sum_j y_j \bar{e}_j$

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}) = {}^T X B Y$$

ove $X = {}^T[x_1 \dots x_n]$

$Y = [y_1 \dots y_n]$.

AL VARIARE DELLA BASE (LA MATRICE) DEL PROD. SCALARE CAMBIA NEL SEGUENTE MODO.

$X' = A'X \quad X = AX'$

$Y' = A'Y \quad Y = AY'$

$\Rightarrow \beta(\bar{x}, \bar{y}) = {}^T X B Y =$

$= {}^T X' B' Y' =$

$$= {}^t(AX')\,B\,(AY') =$$

$$= X'\,({}^tABA)\,Y'$$

$$\Rightarrow \quad B' = {}^tABA$$

N.B. per prod. scalari (forme bilineari) abbiamo $\boxed{B' = {}^tABA}$

^{t} ← trasposta.

sono diversi

per le applicazioni lineari $V_n \to V_n$

$$Y' = B'X'$$

$$Y = BX$$

$$\boxed{B' = A^{-1}BA}$$

A^{-1} ← inversa

$X = AX'$

$$AY' = BAX' \Rightarrow Y' = A^{-1}BA$$

Def: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ con un prodotto scalare non degenere.

1) Una sequenza $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t)$ di vettori è detta ortogonale se $\forall i,j : \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0$ se $i \neq j$

2) Una sequenza di vettori è detta ortonormale se $\forall i,j : \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$

Teorema: Una sequenza ortonormale di vettori è sempre libera.

DIM: Supponiamo $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t)$ ortonormale e per assurdo legata $\Rightarrow \exists \delta_1 \dots \delta_t$ non tutti nulli tali che

$$\delta_1 \bar{v}_1 + \dots + \delta_t \bar{v}_t = 0$$

ma $\bar{v}_i \cdot (\delta_1 \bar{v}_1 + \dots + \delta_t \bar{v}_t) =$

$= \delta_1 (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_1) + \dots \delta_i (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) + \dots$

$+ \delta_t (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_t) =$

$= \delta_i = \bar{v}_i \cdot \underline{0} = 0$

$\Rightarrow \forall i : \delta_i = 0 \Rightarrow$ quindi $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t$ è libera □

Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $V_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.

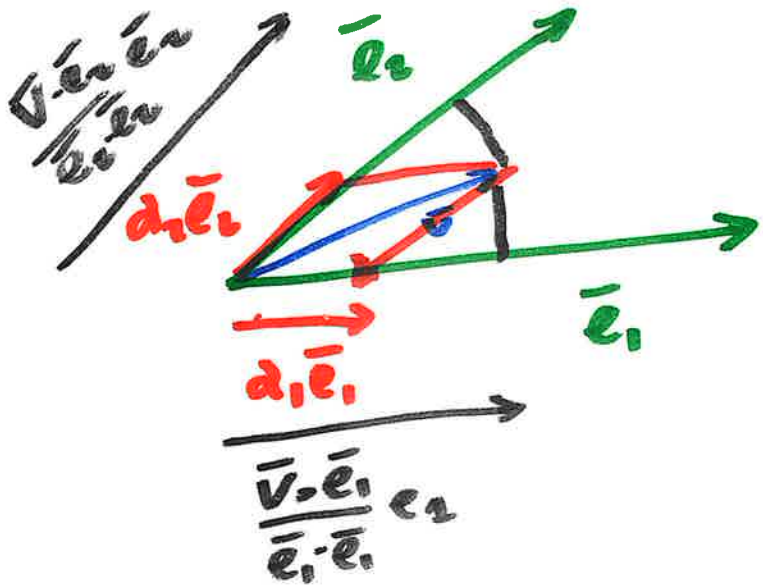
Allora per ogni $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$, $\bar{v} \cdot \bar{e}_i = a_i$

con a_i = componente di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

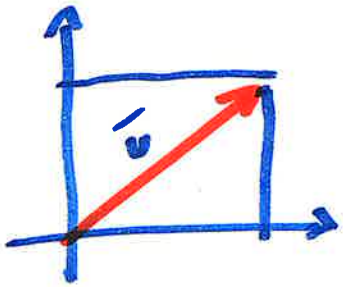
$\bar{v} = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n \Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{e}_i = (a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n) \cdot \bar{e}_i =$

$$= a_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_i) + \dots \; a_i(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) + \dots + a_n(\bar{e}_n \cdot \bar{e}_i) =$$

$$= a_i. \qquad \square$$



$$\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$$



Esistono basi ortonormali?

ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT.

- $V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ spazio vettoriale Euclideo
  - → definito su $\mathbb{R}$
  - → con prod. scalare definito positivo
    - → a) non degenere
      b) privo di vettori isotropi

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n^{\circ}(\mathbb{R})$

ALLORA ESISTE UNA BASE

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \bar{e}_2' \dots \bar{e}_n')$ di $V_n^{\circ}(\mathbb{R})$

TALE CHE

1) $\mathcal{B}'$ è ortonormale.
2) $\forall\, 1 \le i \le n$: $\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i) = \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_i')$.

procediamo per passi.

$$\bar{e}_1 \longrightarrow \bar{e}'_1 := \frac{1}{(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1)^{\frac{1}{2}}} \bar{e}_1 \qquad \|\bar{e}'_1\| = 1$$

$\bar{e}_2$



$$\bar{e}''_2 := \bar{e}_2 - (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}'_1)\bar{e}'_1$$

$$\bar{e}'_2 := (\bar{e}''_2 \cdot \bar{e}''_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \bar{e}''_2 \qquad \|\bar{e}'_2\| = 1$$

$$\bar{e}_i \qquad \bar{e}''_i := \bar{e}_i - \sum_{j<i} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j)\bar{e}'_j$$

$$\bar{e}'_j := (\bar{e}''_j \cdot \bar{e}''_j)^{-\frac{1}{2}} \bar{e}''_j \qquad \|\bar{e}'_j\| = 1$$

ABBIAMO USATO PER NORMALIZZARE IL FATTO CHE

$\bar{x} \cdot \bar{x} \neq 0 \quad \forall \bar{x} \neq \underline{0}$ e che $\bar{x} \cdot \bar{x}$ è un quadrato.

Come è fatta la matrice del prod. scalare rispetto una base ortonormale?

$$B = ((\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j))_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Come sono fatte le matrici di cambiamento di base da rispetto una base ortonormale ad una base ortonormale?

$$B' = {}^tA B A \Rightarrow I = {}^tA A \Rightarrow$$

$B' = I$, $B = I$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = {}^tA}$$

Def Una matrice la cui trasposta coincide con l'inversa è detta ORTOGONALE

Risoluzione di minimi quadrati.

$AX=B$ sistema lineare. $A=[c_1 \dots c_n]$

$\Rightarrow AX=B$ compatibile $\Leftrightarrow$ $B \in \mathcal{L}(c_1 \dots c_n)$.

Voi sapete che un certo processo fisico è descritto da una eq.

$y = ax^2+bx+c$ e avete delle misure

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ... (x_n, y_n)

per determinare a, b, c.

$$\begin{cases} y_1 = a x_1^2 + b x_1 + c \\ y_2 = a x_2^2 + b x_2 + c \\ \vdots \\ y_m = a x_m^2 + b x_m + c \end{cases}$$

→ sistema lineare di m equazioni in 3 incognite (a, b, c).

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & & & \\ x_m^2 & x_m & 1 & y_m \end{array}\right]$$

il sistema può risultare incompat. per via di errori sperimentali.

oss: Il sistema sarebbe compatibile se

$B \in \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

$\Rightarrow$ invece che studiare $AX = B$

studiamo $AX = B'$

ove B' è il vettore appartenente

a $\mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$ "più vicino" a B

$\rightarrow$ B' tale che $\|B - B'\|_2^2$ sia la

più piccola possibile.

Supponiamo Sia X_0 una soluzione del

sistema $AX = B'$ $AX_0 = B'$

ma quindi X_0 minimizza

$\|B' - B\| = \|AX_0 - B\|_2$ $\|AX - B\|$

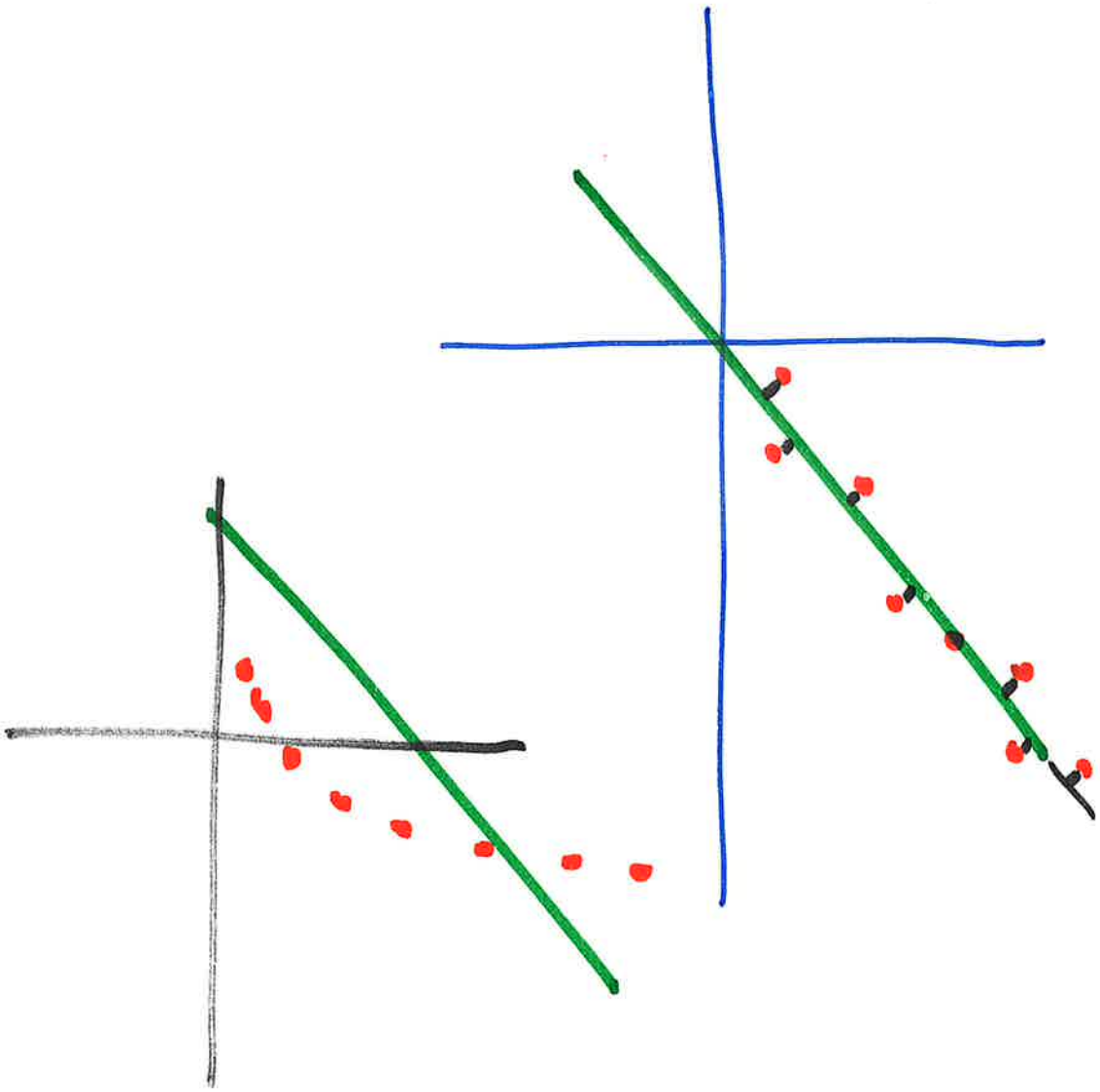
ma quello che noi vogliamo calcolare è
un vettore che minimizzi la "distanza"
dallo sp. vettoriale delle colonne di A

$\Rightarrow (AX - B) \perp \mathcal{L}(c_1 \dots c_n) \iff$

$${}^TA\,(AX - B) = 0$$

$$\Rightarrow {}^TAAX = {}^TAB$$

↖ risolvo questo.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

$x = \frac{3}{2}$

$x = 1$

$x = 0$

$x = 1$

$x = 2$